

SYLLABUS FOR BCS (WRITTEN) EXAMINATION MATHEMATICAL REASONING

SN.	Topic
01	Simplification of Arithmetic and Algebraic Expressions.
02	Unitary Method, Average, Percentage, Simple and Compound interest, LCM, GCD, Ratio and Proportion, Profit and Loss.
03	Algebraic Formulas, Factorization of Polynomials, Linear and Quadratic Equations, Linear and Quadratic Inequalities.
04	Systems of Linear Equations with two or three unknowns.
05	Exponents and Logarithms. Exponential and Logarithmic functions.
06	Arithmetic and Geometric Sequences and Series.
07	Line, Angle, Triangle related theorems. Theorem of Pythagoras, Circle - Theorems, Corollaries.
08	Area related theorems and construction, Mensuration - plane figures and solid objects.
09	Cartesian Geometry- Distance, Equation of a Straight Line.
10	Trigonometric ratios and functions. Problems on height and distances.
11	Set theory. Venn diagram.
12	Counting Principles, Permutations and Combinations. Elementary Probability.

সূচিপত্র

ক্র.নং	বিষয়	পৃষ্ঠা	ক্র.নং	বিষয়	পৃষ্ঠা
পাটিগণিত			১৮	ফাংশন	২৪১
০১	পাটিগণিতীয় সরলীকরণ	০২	১৯	বিন্যাস	২৪৯
০২	ল.সা.গু. ও গ.সা.গু.	০৯	২০	সমাবেশ	২৬৩
০৩	ঐকিক নিয়ম	২৫	২১	সম্ভাব্যতা	২৭৬
০৪	অনুপাত ও সমানুপাত	৪৬	২২	দ্বিপদী বিস্তৃতি	২৯৪
০৫	শতকরা	৬৭	ত্রিকোণমিতি ও পরিমিতি		
০৬	লাভ ও ক্ষতি	৮২	২৩	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	৩০৫
০৭	সরল ও যৌগিক মুনাফা	১০০	২৪	ত্রিকোণমিতির সাহায্যে দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয়	৩২৭
০৮	গড়	১১৭	২৫	পরিমিতি: সরলক্ষেত্র	৩৩৯
বীজগণিত			২৬	পরিমিতি: ঘনবস্তু	৩৬৮
০৯	বীজগাণিতিক সরলীকরণ	১২১	জ্যামিতি		
১০	বীজগাণিতিক সূত্রাবলি	১২৫	২৭	রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য	৩৮৫
১১	উৎপাদকে বিশ্লেষণ	১৩৮	২৮	পিথাগোরাসের উপপাদ্য	৪০৭
১২	একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ	১৪৬	২৯	বৃত্ত ও চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য	৪২১
১৩	দুই বা তিন চলক বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ	১৬২	৩০	স্থানাঙ্ক জ্যামিতি: দূরত্ব ও সরলরেখার সমীকরণ	৪৪২
১৪	সরল ও দ্বিঘাত অসমতা	১৭৫	মডেল টেস্ট		
১৫	সূচক, লগারিদম এবং তাদের ফাংশনসমূহ	১৮২	৩১	মডেল টেস্ট - ০১	৪৭১
১৬	সমাস্তর ও গুণোত্তর অনুক্রম ও ধারা	২০২	৩২	মডেল টেস্ট - ০২	৪৭২
১৭	সেটতত্ত্ব ও ভেনচিত্র	২২০	৩৩	মডেল টেস্ট - ০৩	৪৭৩
			৩৪	মডেল টেস্ট - ০৪	৪৭৪

অধ্যায় ১৫

সূচক ও লগারিদম (Exponents and Logarithms)

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টপিক ও টাইপ সমূহ

টপিক	টাইপ	বিসিএস পরীক্ষা
০১. সূচক	০১. মান নির্ণয় সম্পর্কিত সূচক	৪৪, ৪০, ৩৭, ২২, ১৮ ও ১৭তম বিসিএস
	০২. প্রমাণ সম্পর্কিত সূচক	৪৬, ৪১(২টি), ৩৮, ২০, ১৭ ও ১৩তম বিসিএস
	০৩. সূচকীয় সমীকরণের সমাধান	৫০(২টি), ৪৬, ৪৫, ৪৩, ৩৮, ৩৭(২টি) ও ৩২তম বিসিএস
	০৪. ইনভার্স সম্পর্কিত বীজগাণিতিক রাশি	২০, ১৮, ১৩, ১১ ও ১০তম বিসিএস
০২. লগারিদম	০১. মান নির্ণয় সম্পর্কিত লগ	৩৭তম বিসিএস
	০২. লগের ভিত্তি ও ঘাত নির্ণয় সংক্রান্ত	৪৪তম বিসিএস
	০৩. প্রমাণ সম্পর্কিত লগ	৩৮ ও ৩৬তম বিসিএস
	০৪. সমীকরণ সম্পর্কিত লগ	৫০, ৪৭, ৪৫, ৪৪, ৪৩, ৪০ ও ৩৫তম বিসিএস

অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশিকে সূচকের সাহায্যে লিখে অতি সহজে প্রকাশ করা যায়। ফলে হিসাব গণনা ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান সহজতর হয়। তাই সূচকের ধারণা ও এর প্রয়োগ সম্পর্কে জ্ঞান থাকা আবশ্যিক।

সূচক থেকেই লগারিদমের সৃষ্টি। লগারিদমের সাহায্যে সংখ্যার বা রাশির গুণ, ভাগ ও সূচক সম্পর্কিত গণনার কাজ সহজ হয়েছে। ক্যালকুলেটর ও কম্পিউটার এর ব্যবহার প্রচলনের পূর্ব পর্যন্ত বৈজ্ঞানিক হিসাব ও গণনায় লগারিদমের ব্যবহার ছিল একমাত্র উপায়। এখনও এগুলোর বিকল্প হিসাবে লগারিদমের ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ।

১৫.১ সূচক

অনেক বড় বা ছোট সংখ্যা বা রাশিকে সূচকের সাহায্যে লিখে খুব সহজে প্রকাশ করা যায়। যেমন : $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, ৭টি ২ পর্যায়ক্রমে গুণ না করে, সংখ্যাটি ঐ সংখ্যা দ্বারা যতবার গুণ করা হয়েছে সেটা ঐ সংখ্যাটির মাথায় বসিয়ে দেওয়া হয় অর্থাৎ 2^9 । এখানে ৭ কে বলা হয় ২ এর ‘ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সূচক’ (Positive integer exponent) এবং ২ কে বলা হয় ভিত্তি।

সূচকের ধর্ম ও সূত্রাবলি:

ক্রম	নাম	সূত্র	নিয়ম
১	শূন্য সূচক	$a^0 = 1$	কোনো ভিত্তির ঘাত শূন্য হলে তার মান ১।
২	গুণের নিয়ম	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	গুণ আকারে থাকলে, একই ভিত্তির ঘাত/সূচক যোগ হয়।

৩	ভাগের নিয়ম	$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	ভাগ আকারে থাকলে, একই ভিত্তির ঘাত/সূচক বিয়োগ হয়।
৪	বন্টন সূত্র	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	গুণফল ও ভগ্নাংশের উপর একই সূচক থাকলে, ঘাত/সূচক বন্টন হয়।
৫	বর্গমূলের সূচক	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	‘ $\sqrt[n]{\quad}$ ’ বলতে পদটির ঘাত $\frac{1}{n}$ বোঝায়।
		$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	‘ $\sqrt{\quad}$ ’ বলতে পদটির ঘাত $\frac{1}{2}$ বোঝায়।
৬	ঋণাত্মক সূচক	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	ঘাত ‘-n’ বলতে $\frac{1}{(\text{ভিত্তি})^n}$ বোঝায়।
		$a^{-1} = \frac{1}{a}$	ঘাত ‘-1’ বলতে $\frac{1}{\text{ভিত্তি}}$ বোঝায়।
৭	ঋণাত্মক সূচকের গুণ	$a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$	একই ভিত্তির সমান মানের একটিতে ধনাত্মক, অপরটিতে ঋণাত্মক সূচক থাকলে তাদের গুণফল ১ হয়।
		$a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1$	
৮	সূচকীয় সমীকরণ	$a^x = b^x$ হলে, $a = b$	সমীকরণের উভয় পাশের ঘাত একই হলে, ভিত্তি সমান হয়।
		$a^x = a^y$ হলে, $x = y$	সমীকরণের উভয় পাশের ভিত্তি একই হলে, ঘাত সমান হয়।
৯	শক্তির শক্তি	$(x^m)^n = x^{mn}$	Power- Power গুণ হয়।

Type
01

মান নির্ণয় সম্পর্কিত সূচক

এখানে সূচকের সাধারণ নিয়মাবলি এবং কতিপয় সূত্রাবলির সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট বীজগাণিতিক রাশি/রাশিমালার নির্দিষ্ট মান নির্ণয় সম্পর্কিত কিছু সমস্যার আলোকপাত করা হয়েছে।

 বিগত BCS লিখিত পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

০১। মান বের করুন: $\frac{5.3^m - 9.3^{m-1}}{3^m - 3^{m-1}}$ [৪৪তম বিসিএস]

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : দেওয়া আছে, } & \frac{5.3^m - 9.3^{m-1}}{3^m - 3^{m-1}} \\ &= \frac{5.3^m - 9.3^m \cdot 3^{-1}}{3^m - 3^m \cdot 3^{-1}} \\ &= \frac{3^m(5 - 9 \cdot \frac{1}{3})}{3^m(1 - \frac{1}{3})} \\ &= \frac{5 - 3}{\frac{3-1}{3}} \\ &= 2 \times \frac{3}{2} \\ &= 3 \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

০২। $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $r = xy^{c-1}$ হলে,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^c \times \left(\frac{q}{r}\right)^a \times \left(\frac{r}{p}\right)^b = \text{কত?} \quad [৪০তম বিসিএস]$$

সমাধান : দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}$, $q = xy^{b-1}$, $r = xy^{c-1}$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি: } & \left(\frac{p}{q}\right)^c \times \left(\frac{q}{r}\right)^a \times \left(\frac{r}{p}\right)^b \\ &= \left(\frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}}\right)^c \times \left(\frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}}\right)^a \times \left(\frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}\right)^b \\ & \quad [p, q, r \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= (y^{a-1-b+1})^c \times (y^{b-1-c+1})^a \times (y^{c-1-a+1})^b \\ &= (y^{a-b})^c \times (y^{b-c})^a \times (y^{c-a})^b \\ &= y^{ac-bc} \times y^{ab-ca} \times y^{bc-ab} \\ &= y^{ac-bc+ab-ac+bc-ab} \\ &= y^0 \\ &= 1 \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

০৩। $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$ হলে xyz -এর মান নির্ণয় করুন। [৩৭তম বিসিএস]

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } & c^z = a \\ \Rightarrow & (b^y)^z = a \\ \Rightarrow & b^{yz} = a \\ \Rightarrow & (a^x)^{yz} = a \\ \Rightarrow & a^{xyz} = a^1 \\ \therefore & xyz = 1 \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

০৪। সরল করুন: $\frac{(p + \frac{1}{q})^m (p - \frac{1}{q})^m}{(q + \frac{1}{p})^m (q - \frac{1}{p})^m}$ [২২তম বিসিএস]

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & \frac{(p + \frac{1}{q})^m (p - \frac{1}{q})^m}{(q + \frac{1}{p})^m (q - \frac{1}{p})^m} \\ &= \frac{(\frac{pq+1}{q})^m (\frac{pq-1}{q})^m}{(\frac{pq+1}{p})^m (\frac{pq-1}{p})^m} \\ &= \left(\frac{pq+1}{q} \times \frac{p}{pq+1}\right)^m \times \left(\frac{pq-1}{q} \times \frac{p}{pq-1}\right)^m \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^m \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^{m+m} \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^{2m} \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

০৫। $\left\{\frac{x(a-b)^2}{x-3ab}\right\}^{(a-b)} \left\{\frac{x(b-c)^2}{x-3bc}\right\}^{(b-c)} \left\{\frac{x(c-a)^2}{x-3ca}\right\}^{(c-a)} = \text{কত?}$ [১৮তম বিসিএস]

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & \left\{\frac{x(a-b)^2}{x-3ab}\right\}^{(a-b)} \left\{\frac{x(b-c)^2}{x-3bc}\right\}^{(b-c)} \left\{\frac{x(c-a)^2}{x-3ca}\right\}^{(c-a)} \\ &= (x^{a^2-2ab+b^2+3ab})^{(a-b)} (x^{b^2-2bc+c^2+3bc})^{(b-c)} (x^{c^2-2ca+a^2+3ca})^{(c-a)} \\ &= (x^{a^2+ab+b^2})^{(a-b)} (x^{b^2+bc+c^2})^{(b-c)} (x^{c^2+ca+a^2})^{(c-a)} \\ &= x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \cdot x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} \cdot x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)} \\ &= x^{a^3-b^3} \cdot x^{b^3-c^3} \cdot x^{c^3-a^3} \\ &= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3} \\ &= x^0 = 1 \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

০৬। সরল করুন: $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$ [১৭তম বিসিএস]

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & \frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}} \\ &= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{m^2-1}} \\ &= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1} \\ &= 3^{2m-m^2+1} \div 3^{2m-m^2+3} \\ &= 3^{2m-m^2+1-2m+m^2-3} \\ &= 3^{-2} = \frac{1}{3^2} \\ &= \frac{1}{9} \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

০১। $^{12}\sqrt{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}}$ এর মান কত?

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & ^{12}\sqrt{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}} \\ &= ^{12}\sqrt{(a^8)\sqrt{(a^6) \times (a^4)^{\frac{1}{2}}}} \\ &= ^{12}\sqrt{(a^8)\sqrt{(a^6) \times a^{4 \times \frac{1}{2}}}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6 \times a^2}}$$

$$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^{6+2}}}$$

$$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^8}}$$

$$= \sqrt[12]{(a^8)(a^8)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt[12]{a^8 \times a^4}$$

$$= \sqrt[12]{a^{8+4}}$$

$$= \sqrt[12]{a^{12}}$$

$$= (a^{12})^{\frac{1}{12}}$$

$$= a \text{ (উত্তৰ)}$$

০২। $\frac{4^p-1}{2^p-1} \div (2^p+1)^{-1}$ এর মান কত?

সমাধান : $\frac{4^p-1}{2^p-1} \div (2^p+1)^{-1}$

$$= \frac{(2^p)^2-1}{2^p-1} \div \frac{1}{2^p+1}$$

$$= \frac{(2^p+1)(2^p-1)}{2^p-1} \times \frac{(2^p+1)}{1}$$

$$= (2^p+1)^2 \text{ (উত্তৰ)}$$

০৩। $(3a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a^2})^{-3} \times \sqrt[3]{27}$ এর মান কত ?

সমাধান : $(3a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a^2})^{-3} \times \sqrt[3]{27}$

$$= \left\{ \frac{3}{a} \cdot (a^2)^{\frac{1}{3}} \right\}^{-3} \times (3^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{3}{a} \cdot a^{\frac{2}{3}} \right\}^{-3} \times 3$$

$$= \left(3 \cdot a^{\frac{2}{3}-1} \right)^{-3} \times 3$$

$$= \left(3 \times a^{-\frac{1}{3}} \right)^{-3} \times 3$$

$$= 3^{-3} \times a^{\frac{3}{3}} \times 3$$

$$= 3^{-3+1} a$$

$$= 3^{-2} a$$

$$= \frac{a}{3^2}$$

$$= \frac{a}{9} \text{ (উত্তৰ)}$$

০৪। $(2x^{-1}\sqrt[3]{x^2})^{-6} \div \sqrt[3]{8}$ এর মান কত?

সমাধান : $(2x^{-1}\sqrt[3]{x^2})^{-6} \div \sqrt[3]{8}$

$$= \left\{ \frac{2}{x} \cdot x^{\frac{2}{3}} \right\}^{-6} \div \sqrt[3]{2^3}$$

$$= \left(\frac{2}{x} \right)^{-6} \left(x^{\frac{2}{3}} \right)^{-6} \div 2$$

$$= \left(\frac{x}{2} \right)^6 \cdot x^{-4} \div 2$$

$$= \frac{x^6}{2^6} \cdot \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2^7}$$

$$= \frac{x^2}{128} \text{ (উত্তৰ)}$$

০৫। $\sqrt[3]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[3]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[3]{\frac{x^r}{x^p}}$ [$x > 0$ এবং $p, q, r > 0$]

এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\sqrt[3]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[3]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[3]{\frac{x^r}{x^p}}$

$$= \sqrt[3]{x^{p-q}} \times \sqrt[3]{x^{q-r}} \times \sqrt[3]{x^{r-p}}$$

$$= x^{\frac{p-q}{3}} \times x^{\frac{q-r}{3}} \times x^{\frac{r-p}{3}}$$

$$= x^{\frac{p-q+q-r+r-p}{3}}$$

$$= x^{\frac{0}{3}}$$

$$= x^0$$

$$= 1 \text{ (উত্তৰ)}$$

০৬। মান নির্ণয় করুন : $\frac{a^2+ab}{ab-b^3} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$

সমাধান : $\frac{a^2+ab}{ab-b^3} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$

$$= \frac{a \cdot a^2+ab}{b(a-b^2)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$$

$$= \frac{a(a^2+b)}{b(a-b^2)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$$

$$= \frac{a(\sqrt{a}+b)}{b\{(\sqrt{a})^2-(b)^2\}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$$

$$= \frac{a(\sqrt{a}+b)}{b\{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)\}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$$

$$= \frac{a}{b(\sqrt{a}-b)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$$

$$= \frac{a-b\sqrt{a}}{b(\sqrt{a}-b)}$$

$$= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}-b\sqrt{a}}{b(\sqrt{a}-b)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-b)}{b(\sqrt{a}-b)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{b} \text{ (উত্তৰ)}$$

০৭। সরল কর : $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

সমাধান : $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

$$= \frac{3 \cdot 2^n - 2^2 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^n - 2^{2+n-2}}{2^n - 2^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^n - 2^n}{(1-\frac{1}{2}) \cdot 2^n}$$

$$= \frac{(3-1) \cdot 2^n}{\frac{1}{2} \cdot 2^n}$$

$$= \frac{2 \cdot 2^n}{\frac{1}{2} \cdot 2^n}$$

$$= 2 \cdot 2$$

$$= 4 \text{ (উত্তৰ)}$$

০৮। $\frac{(p^2 - \frac{1}{q^2})^p (p - \frac{1}{q})^{q-p}}{(q^2 - \frac{1}{p^2})^q (q + \frac{1}{p})^{p-q}}$ এর মান কত?

সমাধান : $\frac{(p^2 - \frac{1}{q^2})^p (p - \frac{1}{q})^{q-p}}{(q^2 - \frac{1}{p^2})^q (q + \frac{1}{p})^{p-q}}$

$$= \frac{(p + \frac{1}{q})^p (p - \frac{1}{q})^p (p - \frac{1}{q})^{q-p}}{(q + \frac{1}{p})^q (q - \frac{1}{p})^q (q + \frac{1}{p})^{p-q}}$$

$$= \frac{(pq+1)^p (p - \frac{1}{q})^{p+q-p}}{(pq-1)^q (q + \frac{1}{p})^{q+p-q}}$$

$$= \frac{(pq+1)^p (pq-1)^q}{(pq-1)^q (pq+1)^p}$$

$$= \left(\frac{pq+1}{pq-1} \times \frac{p}{pq+1}\right)^p \times \left(\frac{pq-1}{q} \times \frac{p}{pq-1}\right)^q$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^p \times \left(\frac{p}{q}\right)^q$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^{p+q} \text{ (উত্তর)}$$

০৯। $\frac{(\sqrt[3]{27})^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{(\sqrt{81})^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$ এর মান কত?

সমাধান : $\frac{(\sqrt[3]{27})^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{(\sqrt{81})^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

$$= \frac{(\sqrt[3]{3^3})^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{9^{m+1}}{3^{m^2-1}}$$

$$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{m^2-1}}$$

$$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$$

$$= 3^{2m-m^2+1} \div 3^{2m-m^2+3}$$

$$= 3^{2m-m^2+1-2m+m^2-3}$$

$$= 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{3^2}$$

$$= \frac{1}{9} \text{ (উত্তর)}$$

১০। $\frac{\sqrt[3]{27} \cdot 2^n - \sqrt[3]{64} \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$ এর মান কত?

সমাধান : $\frac{\sqrt[3]{27} \cdot 2^n - \sqrt[3]{64} \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

$$= \frac{(3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^n - (4^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$$

$$= \frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n (1 - \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2^n (3 - 4 \cdot \frac{1}{4})}{2^n \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3-1}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \times 2$$

$$= 4 \text{ (উত্তর)}$$

১১। মান নির্ণয় করুন: $\frac{2^n \cdot 6^{m+1} \cdot 10^{m-n} \cdot 15^{m+n-2}}{4^m \cdot 3^{2m+n} \cdot 25^{m-1}}$

সমাধান : $\frac{2^n \cdot 6^{m+1} \cdot 10^{m-n} \cdot 15^{m+n-2}}{4^m \cdot 3^{2m+n} \cdot 25^{m-1}}$

$$= \frac{2^n \cdot (3 \times 2)^{m+1} \cdot (5 \times 2)^{m-n} \cdot (5 \times 3)^{m+n-2}}{2^{2m} \cdot 3^{2m+n} \cdot 5^{2(m-1)}}$$

$$= \frac{2^n \cdot 3^{m+1} \cdot 2^{m+1} \cdot 5^{m-n} \cdot 2^{m-n} \cdot 5^{m+n-2} \cdot 3^{m+n-2}}{2^{2m} \cdot 3^{2m+n} \cdot 5^{2m-2}}$$

$$= 2^{n+m+1+m-n-2m} \cdot 3^{m+1+m+n-2-2m-n} \cdot 5^{m+n+m+n-2-2m+2}$$

$$= 2^1 \cdot 3^{-1} \cdot 5^0$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{2}{3} \text{ (উত্তর)}$$

১২। $\frac{1}{1+x^{n-m}+x^{p-m}} + \frac{1}{1+x^{m-n}+x^{p-n}} + \frac{1}{1+x^{m-p}+x^{n-p}}$ এর মান কত?

সমাধান : $\frac{1}{1+x^{n-m}+x^{p-m}} + \frac{1}{1+x^{m-n}+x^{p-n}} + \frac{1}{1+x^{m-p}+x^{n-p}}$

১ম অংশ, $\frac{1}{1+x^{n-m}+x^{p-m}} = \frac{1}{1+\frac{x^n}{x^m}+\frac{x^p}{x^m}}$

$$= \frac{1}{\frac{x^m+x^n+x^p}{x^m}} = \frac{x^m}{x^m+x^n+x^p}$$

২য় অংশ, $\frac{1}{1+x^{m-n}+x^{p-n}} = \frac{1}{1+\frac{x^m}{x^n}+\frac{x^p}{x^n}}$

$$= \frac{1}{\frac{x^n+x^m+x^p}{x^n}} = \frac{x^n}{x^n+x^m+x^p}$$

৩য় অংশ, $\frac{1}{1+x^{m-p}+x^{n-p}} = \frac{1}{1+\frac{x^m}{x^p}+\frac{x^n}{x^p}}$

$$= \frac{1}{\frac{x^p+x^m+x^n}{x^p}} = \frac{x^p}{x^p+x^m+x^n}$$

প্রদত্ত রাশিমালা দাঁড়ায়,

$$= \frac{x^m}{x^m+x^n+x^p} + \frac{x^n}{x^n+x^m+x^p} + \frac{x^p}{x^p+x^m+x^n}$$

$$= \frac{x^m+x^n+x^p}{x^m+x^n+x^p} = 1 \text{ (উত্তর)}$$

Type 02

প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলি

সূচকের সাধারণ নিয়মাবলি এবং বীজগণিতের কতিপয় সূত্রাবলির সাহায্যে সূচকের প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলি নিয়ে অধ্যায়ের এই অংশে আলোকপাত করা হয়েছে।



বিগত BCS লিখিত পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

০১। যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $x + y + z = 0$. [৪৬তম, ৪১তম বিসিএস]

সমাধান : মনে করি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

তাহলে, $a^{\frac{1}{x}} = k$ এবং, $b^{\frac{1}{y}} = k$

$$\Rightarrow \left(a^{\frac{1}{x}}\right)^x = k^x \Rightarrow \left(b^{\frac{1}{y}}\right)^y = k^y$$

০৪। সরল করুন: $(x + a)^{-1} + 2x(x^2 + a^2)^{-1} + 4x^3(a^4 - x^4)^{-1}$

সমাধান : $(x + a)^{-1} + 2x(x^2 + a^2)^{-1} + 4x^3(a^4 - x^4)^{-1}$

$$= \frac{1}{x+a} + \frac{2x}{x^2+a^2} + \frac{4x^3}{a^4-x^4}$$

$$= \frac{1}{x+a} + \frac{2x}{x^2+a^2} + \frac{4x^3}{(a^2)^2-(x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{a+x} + \frac{2x}{a^2+x^2} + \frac{4x^3}{(a^2+x^2)(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{1}{a+x} + \frac{2x(a^2-x^2)+4x^3}{(a^2+x^2)(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{1}{a+x} + \frac{2a^2x-2x^3+4x^3}{(a^2+x^2)(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{1}{a+x} + \frac{2x(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)(a+x)(a-x)}$$

$$= \frac{1}{a+x} + \frac{2x}{(a+x)(a-x)}$$

$$= \frac{a-x+2x}{(a+x)(a-x)}$$

$$= \frac{a+x}{(a+x)(a-x)}$$

$$= \frac{1}{a-x} \text{ (উত্তর)}$$

০৫। সরল করুন: $(a + b)^{-1} + b(a^2 - b^2)^{-1} - a(a^2 + b^2)^{-1}$

সমাধান : $(a + b)^{-1} + b(a^2 - b^2)^{-1} - a(a^2 + b^2)^{-1}$

$$= \frac{1}{a+b} + \frac{b}{a^2-b^2} - \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{a+b} + \frac{b}{(a+b)(a-b)} - \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a-b+b}{(a+b)(a-b)} - \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2-b^2} - \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$= a \left(\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{a^2+b^2} \right)$$

$$= a \left\{ \frac{a^2+b^2-a^2+b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} \right\}$$

$$= \frac{a(2b^2)}{a^4-b^4}$$

$$= \frac{2ab^2}{a^4-b^4} \text{ (উত্তর)}$$

প্ৰাক্টিস প্ৰবলেম

- ০১। সমাধান করুন: $\frac{3^{a+4}-9 \cdot 3^{a+1}}{2 \cdot 3^{a+4} \div 3^{-1}}$ [উত্তর : $\frac{1}{9}$]
- ০২। সমাধান করুন: $\frac{2^{m+5}-4 \cdot 2^{m+2}}{2^{m+3} \div 2}$ [উত্তর : 4]
- ০৩। সমাধান করুন: $\frac{9^{x+1}}{(3^x-1)^{x+1}} \div \frac{3^{x+1}}{(3^x)^{x-1}}$ [উত্তর : 9]
- ০৪। সমাধান করুন: $(5\sqrt{2})^2 \times \frac{2^{m+1} \cdot 3^{2m-n} \cdot 5^{m+n} \cdot 6^n}{6^m \cdot (10)^{n+2}}$ [উত্তর : 1]
- ০৫। সমাধান করুন: $\frac{7 \cdot 2^a - 2 \cdot 2^{a-1}}{2^a - 2^{a-1}} \div \frac{7^{b+2} - 3 \cdot 7^{b+1}}{7^{b+2} \div 7} \div \sqrt{16}$ [উত্তর : 1]
- ০৬। সমাধান করুন: $\frac{1}{1+x^{-a} \cdot y^b + x^{-a} z^c} + \frac{1}{1+y^{-b} z^c + y^{-b} x^a} + \frac{1}{1+z^{-c} x^a + z^{-c} y^b}$ [উত্তর : 1]
- ০৭। যদি, $a^2 = b^3$ হয়, তবে দেখান যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$
- ০৮। যদি, $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে xyz এর মান নির্ণয় করুন। [উত্তর : 0]
- ০৯। $a^m \cdot a^n = (a^m)^n$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $m(n-2) + n(m-2) = 0$
- ১০। যদি $x^{\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করুন। [উত্তর : $\frac{9}{4}$]
- ১১। সমাধান করুন: $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^5 = 0$ [উত্তর : 2, 3]
- ১২। সমাধান করুন: $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320$ [উত্তর : 5]
- ১৩। সমাধান করুন: $2^{2x+1} \cdot 2^{3y+1} = 8$, $2^{x+2} \cdot 2^{y+2} = 16$ [উত্তর : $x = -1, y = 1$]
- ১৪। $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b+c} \div 2(p^c \cdot p^a)^{a-c}$ এর মান নির্ণয় করুন। [উত্তর : $\frac{1}{2}$]
- ১৫। মান নির্ণয় করুন: $\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a-b}{b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a-b}{a}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a-b}{b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a-b}{a}}}$ [উত্তর : $\frac{a^2-b^2}{ab}$]
- ১৬। সমাধান করুন: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ [উত্তর : $x = \frac{3}{2}$]

১৫.২

লগারিদম

লগারিদম হচ্ছে সূচকের বিপরীত প্রক্রিয়া। Logos এবং Arithmas নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে Logarithm শব্দটির উৎপত্তি। Logos অর্থ আলোচনা এবং Arithmas অর্থ সংখ্যা। সুতরাং Logarithm শব্দটির অর্থ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা।

যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তবে, x কে b এর a ভিত্তিক লগারিদম বলা হয়।

সুতরাং যদি $a^x = b$ হয়, $x = \log_a b$

যেমন : যদি $4^2 = 16$ হয়, তবে $2 = \log_4 16$

লগারিদম এর ধর্ম ও সূত্রাবলি:

নাম	সূত্র	উদাহরণ
শূন্য ও একক লগ	$\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$
	$\log_a a = 1$	$\log_5 5 = 1$
গুণফলের লগ	$\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$	$\log_3 (9 \times 27) = \log_3 9 + \log_3 27$
ভাগফলের লগ	$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$	$\log_2 \left(\frac{64}{4}\right) = \log_2 64 - \log_2 4$
ঘাতের লগ	$\log_a m^n = n \log_a m$	$\log_5 5^3 = 3 \log_5 5$
	$a^{\log_a b} = b$	$7^{\log_7 9} = 9$
ভিত্তি পরিবর্তন	$\log_a m = \log_b m \times \log_a b$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_4 16 \times \log_{\frac{1}{2}} 4$
	$\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$	$\log_{\frac{1}{2}} 8 = \frac{1}{\log_8 \frac{1}{2}}$
সমীকরণের লগ	$\log_a x = \log_a y$ হলে, $x = y$	$\log_3 2x = \log_3 (x + 3)$ $\Rightarrow 2x = x + 3$

Type 01

মান নির্ণয় সম্পর্কিত লগ

এখানে লগের সাধারণ নিয়মাবলি এবং কতিপয় সূত্রাবলির সাহায্যে লগ যুক্ত একটি নির্দিষ্ট বীজগাণিতিক রাশি/রাশিমালার মান নির্ণয় সম্পর্কিত কিছু সমস্যার আলোকপাত করা হয়েছে।

বিগত BCS লিখিত পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

০১। $\log_{2\sqrt{5}} 400$ এর মান কত? [৩৭তম বিসিএস]

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_{2\sqrt{5}} 400$

$$= \log_{(2\sqrt{5})} (2\sqrt{5})^4$$

$$= 4 \log_{(2\sqrt{5})} 2\sqrt{5}$$

$$= 4 \times 1$$

$$= 4 [\because \log_a a = 1]$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান} = 4 \text{ (উত্তর)}$$

নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

০১। মান নির্ণয় করুন: $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$

সমাধান : $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$

$$= \log_5 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_5 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$$

$$= \log_5 5^{\frac{2+3}{6}}$$

$$= \log_5 5^{\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{5}{6} \log_5 5$$

$$= \frac{5}{6} \cdot 1$$

$$= \frac{5}{6} \text{ (উত্তর)}$$

০২। $\log_{10} [98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}] = 2$ হয় তবে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_{10} [98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}] = 2$

$$\Rightarrow 98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 10^2 = 100$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 4 \quad [\text{উভয়পক্ষকে বর্গ করে}]$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 8) - 4(x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 8) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ অথবা, } x = 8$$

$$\therefore x \text{ এর নির্ণেয় মান: } 4 \text{ অথবা, } 8 \text{ (উত্তর)}$$

০৩। $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}) \div \log_5 \sqrt[3]{5}$ এর মান কত?

সমাধান : $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}) \div \log_5 \sqrt[3]{5}$

$$= \log_5 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \div \log_5 5^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_5 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \div \log_5 5^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_5 5^{\frac{2+3}{6}} \div \frac{1}{3} \log_5 5$$

$$= \frac{5}{6} \log_5 5 \div \frac{1}{3} \log_5 5$$

$$= \frac{5}{6} \cdot 1 \div \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{3}{1}$$

$$= \frac{5}{2} \text{ (উত্তর)}$$

০৪। $\log_5(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}) + \log_4 2 + \log_{2\sqrt{5}} 400$ এর মান নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & \log_5(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}) + \log_4 2 + \log_{2\sqrt{5}} 400 \\ & = \log_5(5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}) + \log_4 \sqrt{4} + \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4 \\ & = \log_5 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} + \log_4 4^{\frac{1}{2}} + \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4 \\ & = \log_5 5^{\frac{5}{6}} + \log_4 4^{\frac{1}{2}} + \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4 \\ & = \frac{5}{6} \log_5 5 + \frac{1}{2} \log_4 4 + 4 \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5}) \\ & = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} + 4 \quad [\because \log_a a = 1] \\ & = \frac{5+3+24}{6} \\ & = \frac{32}{6} \\ & = \frac{16}{3} \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

০৫। $(\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}) \times (\log_3 6 - \log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{\frac{2}{3}})$ এর মান কত?

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & (\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}) \times (\log_3 6 - \log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ & = \log_2 (\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{2}{3}}) \times \log_3 (6 \div \sqrt{6} \div \sqrt{\frac{2}{3}}) \\ & = \log_2 (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) \times \log_3 (6 \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) \\ & = \log_2 2 \times \log_3 (\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) \\ & = 1 \times \log_3 (\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) \\ & = 1 \times \log_3 3 \\ & = 1 \times 1 \\ & = 1 \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

০৬। $\log 5 + 16 \log \frac{16}{15} + 12 \log \frac{25}{24} + 7 \log \frac{81}{80}$ এর মান নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & \log 5 + 16 \log \frac{16}{15} + 12 \log \frac{25}{24} + 7 \log \frac{81}{80} \\ & = \log 5 + \log \left(\frac{16}{15}\right)^{16} + \log \left(\frac{25}{24}\right)^{12} + \log \left(\frac{81}{80}\right)^7 \\ & = \log 5 + \log \left\{ \left(\frac{16}{15}\right)^{16} \times \left(\frac{25}{24}\right)^{12} \times \left(\frac{81}{80}\right)^7 \right\} \\ & = \log 5 + \log \left\{ \left(\frac{2^4}{3 \cdot 5}\right)^{16} \times \left(\frac{5^2}{3 \cdot 2^3}\right)^{12} \times \left(\frac{3^4}{5 \cdot 2^4}\right)^7 \right\} \\ & = \log 5 + \log \left(\frac{2^{64} \cdot 5^{24} \cdot 3^{28}}{3^{16} \cdot 3^{16} \cdot 3^{12} \cdot 2^{36} \cdot 5^7 \cdot 2^{28}} \right) \\ & = \log 5 + \log \frac{2^{64} \cdot 3^{28} \cdot 5^{24}}{2^{64} \cdot 3^{28} \cdot 5^{23}} \\ & = \log 5 + \log 5^{24-23} \\ & = \log 5 + \log 5 \\ & = 2 \log 5 \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

০৭। $\log \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log \frac{c^3 d^3}{a^3}$ এর মান কত?

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & \log \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log \frac{c^3 d^3}{a^3} \\ & = \log \left(\frac{a^3 b^3}{c^3} \times \frac{b^3 c^3}{d^3} \times \frac{c^3 d^3}{a^3} \right) \\ & = \log b^6 c^3 \\ & = \log (b^2 c)^3 \\ & = 3 \log b^2 c \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

০৮। $\frac{\log 3^2 + 3 \log 2 - \log 5^2 - \log 2^2}{\log 4 + \log 3 - \log 2 - \log 5}$ এর মান নির্ণয় করুন।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } & \frac{\log 3^2 + 3 \log 2 - \log 5^2 - \log 2^2}{\log 4 + \log 3 - \log 2 - \log 5} \\ & = \frac{\log 3^2 + \log (\sqrt{4})^3 - \log 5^2 - \log 2^2}{\log 4 + \log 3 - \log 2 - \log 5} \\ & = \frac{\log 3^2 + \log 4^{\frac{3}{2}} - \log 5^2 - \log 2^2}{\log 4 + \log 3 - \log 2 - \log 5} \\ & = \frac{\frac{3}{2} (\log 3 + \log 4 - \log 5 - \log 2)}{(\log 3 + \log 4 - \log 5 - \log 2)} \\ & = \frac{3}{2} \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

Type 02

লগের ভিত্তি ও ঘাত নির্ণয় সংক্রান্ত



বিগত BCS লিখিত পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

০১। সমাধান করুন: $\log_{10} x = -3$ [৪৪তম বিসিএস]

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_{10} x = -3$

$$\Rightarrow x = 10^{-3} \quad [\log_a b = m \text{ হলে } b = a^m]$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{10^3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$

$$\therefore x = 0.001 \quad (\text{উত্তর})$$

নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

০১। সমাধান করুন, $\log_x \left(\frac{1}{16}\right) = -2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\log_x \left(\frac{1}{16}\right) = -2$

$$\therefore x^{-2} = \frac{1}{16} \quad [\because x = \log_a b \text{ হয়, তবে } a^x = b]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4^2} \quad [\text{উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে}]$$

$$\therefore x = 4 \quad [\text{যেহেতু লগারিদমের ভিত্তি ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই } x \neq -4]$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } x = 4$$

০২। x এর মান নির্ণয় করুন: $\log_x 324 = 4$

সমাধান : $\log_x 324 = 4$

$$\Rightarrow x^4 = 324 \quad [\because x = \log_a b \text{ হয়, তবে } a^x = b]$$

$$\Rightarrow x^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 3^4 \times 2^2$$

$$\Rightarrow x^4 = 3^4 \times (\sqrt{2})^4$$

$$\Rightarrow x^4 = (3\sqrt{2})^4$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2} \text{ (উত্তর)}$$

**Type
03**

প্রমাণ সম্পর্কিত লগ

সূচক এবং লগারিদমের সাধারণ নিয়মাবলি এবং বীজগণিতের কতিপয় সূত্রাবলি ও বিস্তৃতির সাহায্যে লগের প্রমাণ সম্পর্কিত সমস্যাবলি নিয়ে অধ্যায়ের এই অংশে আলোকপাত করা হয়েছে।

নিম্নে দুইটি গুরুত্বপূর্ণ পদের বিস্তৃতি দেখানো হলো-

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \infty \text{ for } |x| < 1$$



বিগত BCS লিখিত পরীক্ষার প্রশ্ন ও সমাধান

০১। প্রমাণ করুন যে, $\log_a \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log_a x_i$

[৩৮তম বিসিএস]

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\log_a \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n \log_a x_i$$

$$\text{বামপক্ষ} = \log_a \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)$$

$$= \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \dots \dots \dots x_n)$$

$$= \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \dots \dots \dots + \log_a x_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \log_a x_i = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

০২। দেখান যে, $\frac{1}{e} = 2 \left(\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \dots \infty \right)$

[৩৬ তম বিসিএস]

সমাধান : আমরা জানি, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \infty$

$x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \dots \infty$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \dots \infty$$

$$= \frac{3-1}{6} + \frac{5-1}{120} + \frac{7-1}{5040} + \dots \infty$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{4}{120} + \frac{6}{5040} + \dots \infty$$

$$= 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{120} + \frac{3}{5040} + \dots \infty \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3!} + \frac{2}{5!} + \frac{3}{7!} + \dots \infty \right) \text{ (দেখানোহলো)}$$

নমুনা প্রশ্ন ও সমাধান

০১। প্রমাণ করুন: $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$

সমাধান : বামপক্ষ = $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$

$$= \log \left(\frac{10}{9} \right)^7 - \log \left(\frac{25}{24} \right)^2 + \log \left(\frac{81}{80} \right)^3$$

$$= \log \left\{ \left(\frac{10}{9} \right)^7 \div \left(\frac{25}{24} \right)^2 \times \left(\frac{81}{80} \right)^3 \right\}$$

$$= \log \left\{ \left(\frac{2 \cdot 5}{3^2} \right)^7 \div \left(\frac{5^2}{3 \cdot 2^3} \right)^2 \times \left(\frac{3^4}{5 \cdot 2^4} \right)^3 \right\}$$

$$= \log \left(\frac{2^7 \cdot 5^7}{3^{14}} \times \frac{3^2 \cdot 2^6}{5^4} \times \frac{3^{12}}{5^3 \cdot 2^{12}} \right)$$

$$= \log \left(\frac{2^{13} \cdot 3^{14} \cdot 5^7}{2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^7} \right)$$

$$= \log 2^{13-12}$$

$$= \log 2^1$$

$$= \log 2 = \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

০২। প্রমাণ করুন যে, $3 \log \sqrt{3} + \log 8 - \log \sqrt{1000} = \frac{3}{2} (\log 6 - \log 5)$

সমাধান : বামপক্ষ = $3 \log \sqrt{3} + \log 8 - \log \sqrt{1000}$

$$= \log \left(3^{\frac{3}{2}} \right) + \log \sqrt{64} - \log \sqrt{1000}$$

$$= \log 3^{\frac{3}{2}} + \log (4^3)^{\frac{1}{2}} - \log (10^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log 3^{\frac{3}{2}} + \log 4^{\frac{3}{2}} - \log 10^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \log 3 + \frac{3}{2} \log 4 - \frac{3}{2} \log 10$$

$$= \frac{3}{2} (\log 3 + \log 4 - \log 10)$$

$$= \frac{3}{2} \log (3 \times 4 \div 10)$$

$$= \frac{3}{2} \log \left(3 \times 4 \times \frac{1}{10} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \log \frac{6}{5}$$

$$= \frac{3}{2} (\log 6 - \log 5)$$

$$= \text{ডানপক্ষ (প্রমাণিত)}$$

০৩। $\frac{\log \sqrt{27} + \log \sqrt{64} - \log \sqrt{1000}}{\log 1.2} = \frac{3}{2}$ প্রমাণ করুন।

সমাধান : বামপক্ষ = $\frac{\log \sqrt{27} + \log \sqrt{64} - \log \sqrt{1000}}{\log 1.2}$

$$= \frac{\log \sqrt{3^3} + \log \sqrt{4^3} - \log \sqrt{10^3}}{\log 1.2}$$

$$= \frac{\log 3^{\frac{3}{2}} + \log 4^{\frac{3}{2}} - \log 10^{\frac{3}{2}}}{\log 1.2}$$

$$= \frac{\log 3^{\frac{3}{2}} + \log 4^{\frac{3}{2}} - \log 10^{\frac{3}{2}}}{\log 1.2}$$



০৯। যদি $2 \log_8 A = p$, $2 \log_2 2A = q$ এবং $q - p = 4$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : দেওয়া আছে, $2 \log_8 A = p$ (i)

$$2 \log_2 2A = q \text{ (ii)}$$

$$\text{এবং } q - p = 4 \text{ (iii)}$$

$$(i) \text{ নং থেকে, } 2 \log_8 A = p$$

$$\Rightarrow \log_8 A^2 = p$$

$$\Rightarrow A^2 = 8^p$$

$$\Rightarrow A^2 = 2^{3p} \text{ (iv)}$$

$$\text{আবার, (ii) নং থেকে, } 2 \log_2 2A = q$$

$$\Rightarrow \log_2 (2A)^2 = q$$

$$\Rightarrow (2A)^2 = 2^q$$

$$\Rightarrow 2^2 \cdot A^2 = 2^q$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2^q}{2^2}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2^{q-2}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2^{q-2} \text{ (v)}$$

এখন, (iv) ও (v) নং থেকে পাই,

$$2^{3p} = 2^{q-2}$$

$$\Rightarrow 3p = q - 2$$

$$\Rightarrow 3p + 2 = q$$

$$\Rightarrow q = 3p + 2 \text{ (vi)}$$

$$(iii) \text{ নং থেকে, } q - p = 4$$

$$\Rightarrow (3p + 2) - p = 4 \text{ [q এর মান বসিয়ে]}$$

$$\Rightarrow 2p + 2 = 4$$

$$\Rightarrow 2p = 2$$

$$\Rightarrow p = 1$$

$$P \text{ এর মান (iv) নং এ বসিয়ে, } A^2 = 2^{3P}$$

$$\Rightarrow A^2 = 2^{3 \times 1}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান : } A = 2\sqrt{2} \text{ (উত্তর)}$$

প্ৰ্যাক্টিস প্ৰবলেম

০১। মান নির্ণয় করুন:

$$(i) \log_9 3$$

$$\text{[উত্তর : } \frac{1}{2}]$$

$$(ii) \log_{2\sqrt{5}} 400$$

$$\text{[উত্তর : 4]}$$

$$(iii) \log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$$

$$\text{[উত্তর : } \frac{5}{6}]$$

$$(iv) \log_{\sqrt{3}} 81$$

$$\text{[উত্তর : 8]}$$

০২। x এর মান নির্ণয় করুন:

$$(i) \log_x 25 = 2$$

$$\text{[উত্তর : 5]}$$

$$(ii) \log_x \frac{1}{16} = -2$$

$$\text{[উত্তর : 4]}$$

$$(iii) \log_{10} x = -2$$

$$\text{[উত্তর : 0.01]}$$

০৩। মান নির্ণয় করুন : $\log_2 264 + \log_{\sqrt{3}} 81 - \log_{2\sqrt{3}} 144$

$$\text{[উত্তর : 12]}$$

০৪। মান নির্ণয় করুন : $\log_{2\sqrt{5}} 400 + \log_{3\sqrt{2}} 324 + \log_6 6\sqrt{6}$

$$\text{[উত্তর : } \frac{19}{2}]$$

০৫। $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} - \log 2$ এর মান নির্ণয় করুন।

$$\text{[উত্তর : 0]}$$

০৬। প্রমাণ করুন : $3 \log_5 2 + 2 \log_5 3 + \log_5 5 = \log_5 360$

০৭। প্রমাণ করুন : $7 \log_{10} \frac{10}{9} - 2 \log_{10} \frac{25}{24} + 3 \log_{10} \frac{81}{80} = \log_{10} 2$

০৮। প্রমাণ করুন : $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

০৯। প্রমাণ করুন যে, $\log_a \log_a \log_a (a^{a^b}) = b$

১০। দেখান যে, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

১১। সরল করুন : $\log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - 3 \log_e b^2 c$

$$\text{[উত্তর : 0]}$$

১২। সরল করুন : $\log_5 (\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt{5}) - \log_3 (\sqrt[3]{3}) + \log_4 2$

$$\text{[উত্তর : } \frac{13}{15}]$$

১৩। সরল করুন : $\log_5 \sqrt[3]{5} + \log_7 \sqrt[3]{7}(\sqrt{7}) + \log_4 2$

$$\text{[উত্তর : } \frac{5}{3}]$$

১৪। সরল করুন : $3 \log \frac{36}{25} + \log \left(\frac{2}{9}\right)^3 - 2 \log \frac{16}{125}$

$$\text{[উত্তর : } \log 2]$$

১৫। দেখান যে, $5 \log \frac{2}{5} + 6 \log \frac{8}{5} + 7 \log \frac{15}{16} + \log \frac{32}{25} = 7 \log 3 - 6 \log 5$

১৬। $\frac{\log_p x}{y-z} = \frac{\log_p y}{z-x} = \frac{\log_p z}{x-y}$ হলে, xyz এর মান কত?

$$\text{[উত্তর : 1]}$$

১৭। যদি $m^{3-x} \times n^{5x} = m^{5+x} \times n^{3x}$ হয়, তবে দেখান যে, $x \log_k \frac{n}{m} = \log_k m$

১৮। যদি $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ হয় তবে, দেখান যে, $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$



মডেল টেস্ট - ০১

গাণিতিক যুক্তি

সেট কোড: ০০৮

সময়: ২ ঘণ্টা

পূর্ণমান: ৫০

গড়াই

সেট ২

[সকল প্রশ্নের মান প্রত্যেক প্রশ্নের শেষ প্রান্তে দেখানো হয়েছে। যে-কোনো ১০টি প্রশ্নের উত্তর দিন।]

- ১। (ক) সরল করুন: $২.৪ \div ০.৫$ এর $০.৫ \times ৩.৭৫ + ৩.৭৬ \div ০.১৬$ এর ৫? ২.৫
- (খ) সমাধান করুন: $4^x - 3(2^{x+2}) + 2^5 = 0$ ২.৫
- ২। (ক) $a^4 - 18a^2b^2 + b^4 = 0$ যেখানে $a > b$ হলে, $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}\right)$ এর মান কত? ২.৫
- (খ) যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে প্রমাণ করুন, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ২.৫
- ৩। $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় করুন। ৫
- ৪। ১৮০ টাকা ৬ জন পুরুষ ও মহিলার মাঝে ভাগ করে দেওয়া হলো। মোট পুরুষ ও মহিলাদের প্রাপ্ত টাকার অনুপাত ৫:৪। প্রতি পুরুষ ও মহিলার প্রাপ্ত টাকার অনুপাত ৩:২ হলে সর্বমোট পুরুষের সংখ্যা কত? ৫
- ৫। প্রমাণ করুন যে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যে কোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ। ৫
- ৬। একটি সুপারি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙ্গে গেল যেন ভাঙ্গা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 60° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে ২৪ মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। ৪ মিটার লম্বা একটি মই ভূমির সাথে 60° কোণ করে দণ্ডায়মান অংশের সাথে ঠেস দেওয়া হলো। ঠেস দেওয়ার অবস্থান থেকে তার উপরের দণ্ডায়মান অংশে দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। ৫
- ৭। $A(x, y)$, $B(2, 4)$, $C(-3, 3)$ xy সমতলে তিনটি বিন্দু।
- (ক) BC রেখার ঢাল নির্ণয় করুন। ২.৫
- (খ) BC রেখার সমীকরণ নির্ণয় করে রেখাটির x ও y অক্ষের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। ২.৫
- ৮। একটি তিন অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার প্রথম দুইটি অঙ্কের যোগফল তৃতীয় অঙ্কের সমান। যদি অঙ্কগুলো স্থান পরিবর্তন করে তাহলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি আসল সংখ্যার চেয়ে ১৯৮ বেশি। সম্ভাব্য সংখ্যাগুলো কী কী? ৫
- ৯। মা এবং পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত ১১:৫। পুত্র যখন মায়ের বর্তমান বয়সের সমান হবে, তখন পিতা ও মাতার বয়সের অনুপাত হবে ১৯:১৭। পুত্র যখন পিতার বর্তমান বয়সের সমান হবে, তখন পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি হবে ১৭০ বছর। পিতার বর্তমান বয়স কত? ৫
- ১০। (ক) একটি নল দ্বারা একটি শূন্য জলাধার পূর্ণ করতে ১২ মিনিট সময় লাগে। অপর একটি নল মিনিটে ১৪ লিটার পানি বের করে দেয়। দুইটি নল একই সাথে খুলে দিলে ৯৬ মিনিটে পূর্ণ হয়। জলাধারের ধারণ ক্ষমতা কত? ২.৫
- (খ) একটি চৌবাচ্চায় ১০০০০ লিটার পানি ধরে। চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য ২.৫ মিটার এবং প্রস্থ ১.৭৫ মিটার হলে গভীরতা কত? ২.৫
- ১১। একটি পায়ে ৪ টি সাদা, ৫ টি লাল এবং ৬ টি সবুজ বল আছে। তা হতে একত্রে ৩ টি বল দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো।
- (ক) কমপক্ষে দুইটি বল লাল হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ২.৫
- (খ) বড়জোর দুইটি বল লাল হবার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। ২.৫
- ১২। ΔABC - এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AP , BC - কে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করুন যে, $BP : PC = BA : AC$. ৫

