নবম-দশম শ্রেণি

প্যারালাল TEXT

উচ্চতর গণিত

সার্বিক ব্যবস্থাপনায়
উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতায়
মাহমুদুল হাসান সোহাগ
মুহাম্মদ আবুল হাসান লিটন

কৃতজ্ঞতা
উদ্ভাস-উন্মেষ-উত্তরণ
শিক্ষা পরিবারের সকল সদস্য

প্রকাশনায়
উদ্ভাস একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

প্রকাশকাল
সর্বশেষ সংস্করণ: জানুয়ারি, ২০২৫ ইং

Fixed Price
১২৯৫/-
(এক হাজার দুইশত পঁচানব্বই টাকা মাত্র)

কপিরাইট © উদ্ভাস

সমস্ত অধিকার সংরক্ষিত। এই বইয়ের কোনো অংশই প্রতিষ্ঠানের লিখিত অনুমতি ব্যতীত ফটোকপি, রেকর্ডিং, বৈদ্যুতিক বা যান্ত্রিক পদ্ধতিসহ কোনো উপায়ে পুনরুৎপাদন বা প্রতিলিপি, বিতরণ বা প্রেরণ করা যাবে না। এই শর্ত লঙ্ঘিত হলে উপযুক্ত আইনি ব্যবস্থা গ্রহণ করা হবে।

উৎসর্গ

বৈষম্যের বিষাক্ত ছায়া সমাজের প্রতিটি স্তরে আঘাত হানে, বর্ণিল স্বপ্নগুলোকে চুরমার করে দিয়ে তৈরি করে অসমতার দেয়াল। এ অন্ধকারের বিরুদ্ধে বুক চিতিয়ে দাঁড়িয়েছিল এদেশের সাহসী শিক্ষার্থীরা, যারা নিজের জীবন বাজি রেখে ন্যায়ের পক্ষে লড়াই করেছে। যাদের চেতনা ছিল অবিচল, যাদের উৎসর্গ ছিল নিঃস্বার্থ। বৈষম্যের বিরুদ্ধে এই সংগ্রামে তারা যে আলোর মশাল প্রজ্বলিত করেছে, সেই আলো প্রজন্ম থেকে প্রজন্মকে পথ দেখিয়ে নিয়ে যাবে বহুদূর।

যারা নিজের জীবন উৎসর্গ করে আমাদের মুক্তির পথ সুগম করেছে, সেই সকল বৈষম্যবিরোধী ছাত্র আন্দোলনের শহিদদের তরে...

সূচিপত্র

উচ্চতর গণিত

ফুল সিলেবাস

ক্র.নং	অধ্যায়	পৃষ্ঠা
০১	অধ্যায়-০১: সেট ও ফাংশন	০১-৮০
০২	অধ্যায়-০২: বীজগাণিতিক রাশি	৮১-১২৮
০৩	অধ্যায়-০৩: জ্যামিতি	১২৯-১৭৫
০৪	অধ্যায়-০৪: জ্যামিতিক অঙ্কন	১৭৬-২১০
০৫	অধ্যায়-০৫: সমীকরণ	২১১-২৬৫
০৬	অধ্যায়-০৬: অসমতা	২৬৬-৩০১
০৭	অধ্যায়-০৭: অসীম ধারা	৩০২-৩৩৮
০৮	অধ্যায়-০৮: ত্রিকোণমিতি	৩৩৯-৪০৮
০৯	অধ্যায়-০৯: সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন	৪০৯-৪৭৬
১০	অধ্যায়-১০: দ্বিপদী বিস্তৃতি	৪৭৭-৫০৪
১১	অধ্যায়-১১: স্থানাঙ্ক জ্যামিতি	৫০৫-৫৬৩
১২	অধ্যায়-১২: সমতলীয় ভেক্টর	৫৬৪-৫৯১
১৩	অধ্যায়-১৩: ঘন জ্যামিতি	৫৯২-৬৩৮
১৪	অধ্যায়-১৪: সম্ভাবনা	৬৩৯-৬৭৬

Gmail

পারস্পরিক সহযোগিতা-ই পারে পৃথিবীকে আরও সুন্দর করতে...

সুপ্রিয় শিক্ষার্থী,

আশা করি, 'Parallel Text' তোমাদের কাছে অনেক বেশি উপকারী হিসেবে বিবেচিত হবে ইন-শা-আল্লাহ্। বইটি সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত রাখতে আমরা চেষ্টার কোনো ত্রুটি করি নাই। তবুও কারো দৃষ্টিতে কোনো ভুল ধরা পড়লে নিম্নে উল্লিখিত ই-মেইল এ অবহিত করলে কৃতজ্ঞ থাকবো এবং আমরা তা পরবর্তী সংস্করণে সংশোধন করে নিব ইন-শা-আল্লাহ্।

Email : solutionpt.udvash@gmail.com

Email-এ নিম্নলিখিত বিষয়গুলো উল্লেখ করতে হবে:

(i) 'Parallel Text' এর বিষয়ের নাম, (ii) ভার্সন (বাংলা/ইংলিশ), (iii) অধ্যায়, (iv) পৃষ্ঠা নম্বর, (v) প্রশ্ন নম্বর, (vi) ভুলটা কী, (vii) কী হওয়া উচিত বলে তোমার মনে হয়।

উদাহরণ: 'Parallel Text নবম-দশম শ্রেণি' উচ্চতর গণিত, বাংলা ভার্সন, অধ্যায়-০১, পৃষ্ঠা-১১, প্রশ্ন-০১, দেওয়া আছে, উত্তর '0' কিন্তু হবে '4'।

ভুল ছাড়াও মান উন্নয়নে যেকোনো পরামর্শ আন্তরিকভাবে গ্রহণ করা হবে। পরিশেষে, মহান আল্লাহ্‌র নিকট তোমাদের সাফল্য কামনা করছি।

শুভ কামনায়

উদ্ভাস ম্যাথ টিম

অধ্যায় ০১ সেট ও ফাংশন

রুমান ধানমন্ডি সরকারি বালক উচ্চ বিদ্যালয়ের গণিতের শিক্ষক। তার ক্লাসের ছাত্র সংখ্যা 100 জন। একদিন ক্লাসে রুমান তার ছাত্রদের জিজ্ঞেস করলো, "তোমরা কারা ফুটবল খেলতে পারো হাত তুলো"। সে গুণে গুণে দেখলো 60 জন হাত তুলেছে। তারপর সে জিজ্ঞেস করলো "এবার কারা ক্রিকেট খেলতে পারো হাত তুলো"। এবার সে দেখলো 50 জন হাত তুলেছে। এরপর রুমান জিজ্ঞেস করলো "কারা ক্রিকেট ও ফুটবল দুইটিই খেলতে পারো তারা হাত তুলো"। অতপর 30 জন হাত তুললো।

তুমি কি এই তথ্যগুলো থেকে বের করতে পারবে যে, রুমানের ক্লাসে কতজন ছাত্র কোনো খেলাই পারে না? চলো এ ধরনের সমস্যা কিভাবে সহজে সমাধান করা যায় তা এই অধ্যায়টি শেখার মাধ্যমে জানার চেষ্টা করি।

সেট

বাস্তব বা চিন্তা জগতের বস্তুর যেকোন সুনির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলা হয়। দৈনন্দিন জীবনে 'সেট' শব্দটি আমরা প্রচুর ব্যবহার করে থাকি। যেমন: খাবারের ক্ষেত্রে প্লেট, বাটি, পিরিচকে একত্রে 'ডিনার সেট' বলে থাকি। এভাবে একই জাতীয় কাপড়কে একত্রে সেট বলতে পারি। যেকোন উপাদান বিশেষ করে সংখ্যা দ্বারা গঠিত সু-সমাবেশই মূলত সেট। সেট বিভিন্ন উপাদান দ্বারা গঠিত হতে পারে।
যেমন: প্রথম তিনটি বিজোড় সংখ্যা $1, 3, 5$ এই সংখ্যাগুলো দিয়েও সেট গঠন সম্ভব। সেটকে গাণিতিকভাবে প্রকাশের ক্ষেত্রে প্রতিটি উপাদানকে কমার সাহায্যে পৃথক করা হয় এবং সবগুলো উপাদানকে একত্রে দ্বিতীয় বন্ধনী বা $\{\}$ দ্বারা আবদ্ধ করা হয়। এক্ষেত্রে প্রথম তিনটি বিজোড় সংখ্যাকে, $\{1, 3, 5\}$ এভাবে লিখে সেটে প্রকাশ করা যায়। অথবা $\{x: x$ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা এবং $x < 7\}$ এভাবে লিখেও সেটে প্রকাশ করা যায়।

Type-01: সেট প্রকাশের পদ্ধতি

সেটকে সাধারণত দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। সেগুলো হলো-

(i) তালিকা পদ্ধতি (Roster Method বা Tabular Method) (ii) সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method বা Rule Method)

তালিকা পদ্ধতি

এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনী বা $\{\}$ এর মাধ্যমে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে 'কমা' ব্যবহার করে উপাদানগুলো আলাদা করা হয়। যেমন: $A = \{3, 6, 9\}, B = \{a, b\}, C = \{$রাফিজ, রুমান, শোয়েব$\}$

সেট গঠন পদ্ধতি

কোনো সেটের উপাদানসমূহকে সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদানসমূহ নির্ণয়ের জন্য সাধারণ ধর্মের মাধ্যমে সেট প্রকাশের পদ্ধতিকে সেট গঠন পদ্ধতি বলা হয়। যেমন: $B = \{x: x$ স্বাভাবিক জোড় সংখ্যা$\}$ অর্থাৎ, B সেটটি সকল স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সেট। এখানে ':' চিহ্ন দ্বারা এরূপ যেন বা সংক্ষেপে যেন (Such that) বোঝায়। সেট গঠন পদ্ধতির আরও কিছু উদাহরণ- $C = \{x: x$ মৌলিক সংখ্যা এবং 100 এর চেয়ে ছোট$\}$
$D = \{x : x$ স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $10 < x \leq 20\}$

কতিপয় বিশেষ সংখ্যার সেট

- সকল পূর্ণসংখ্যার সেট, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট বা ধণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- সকল অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট, $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- সকল মূলদ সংখ্যার সেট, $Q = \left\{x : x = \frac{p}{q}\right\}$ যেখানে p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q = 0\}$
- সকল বাস্তব সংখ্যার সেট, $\mathbb{R} = \{x : x$ বাস্তব সংখ্যা$\}$

Example-01: $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$; $S = \{x: x, 100$ **থেকে বড় নয় এমন পূর্ণবর্গ সংখ্যা$\}$ (সংশোধিত) উপরের আলোচনায় (ক) S যে সেট তা ব্যাখ্যা কর। (খ) S কে অন্যভাবে প্রকাশ কর।** [কাজ পৃ. নং-০২]

সমাধান:

(ক) আমরা জানি, বাস্তব জগত বা চিন্তা জগতের বস্তুর যে কোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলা হয়। সেটকে সাধারণত ইংরেজি বড় হাতের অক্ষর A, B, C, S, P, Y, Z ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সেটকে প্রকাশের জন্য মূলত দুটি পদ্ধতি রয়েছে। যথা: তালিকা পদ্ধতি ও সেট গঠন পদ্ধতি। উপরোক্ত S সেটকে তালিকা পদ্ধতি এবং সেট গঠন উভয় পদ্ধতিতে প্রকাশ করে সেটের উপাদানগুলো সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারণ করা হয়েছে। সুতরাং S একটি সেট।

(খ) S কে অন্যভাবে প্রকাশ করা হলো:
$S = \{x: x$ পূর্ণবর্গ সংখ্যা এবং $1 \le x \le 100\}$ অথবা $S = \{x: \sqrt{x} \in Z$ এবং $1 \le x \le 100\}$

Example-02: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ **হলে নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ:** [কাজ (ক) পৃ. নং-০৪]

(১) $A = \{x: x \in U, 5x > 37\}$ (২) $B = \{x: x \in U, x + 5 < 12\}$
(৩) $C = \{x: x \in U, 6 < 2x < 17\}$ (৪) $D = \{x: x \in U, x^2 < 37\}$

সমাধান:

(১) $A = \{x: x \in U, 5x > 37\}$

দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A = \{x: x \in U, 5x > 37\}$

এখানে, U সেটের যে সদস্যগুলোর মানের 5 গুণ 37 অপেক্ষা বড় তারা A সেটের সদস্য হবে।

$x = 1$ হলে $5x = 5 \times 1 = 5 < 37$; যা প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে না।
$x = 2$ হলে $5x = 5 \times 2 = 10 < 37$; ”
$x = 3$ হলে $5x = 5 \times 3 = 15 < 37$; ”
$x = 4$ হলে $5x = 5 \times 4 = 20 < 37$; ”
$x = 5$ হলে $5x = 5 \times 5 = 25 < 37$; ”
$x = 6$ হলে $5x = 5 \times 6 = 30 < 37$; ”
$x = 7$ হলে $5x = 5 \times 7 = 35 < 37$; ”
$x = 8$ হলে $5x = 5 \times 8 = 40 > 37$
$x = 9$ হলে $5x = 5 \times 9 = 45 > 37$
$x = 10$ হলে $5x = 5 \times 10 = 50 > 37$

শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য মানসমূহ 8, 9, 10 ∴ নির্ণেয় সেট, $A = \{8, 9, 10\}$ **(Ans.)**

বি. দ্র: সার্বিক সেট U এবং A, B, C, D প্রত্যেকেই সার্বিক সেটের উপসেট। তাই সার্বিক সেট বর্হিভূত কোনো উপাদান A, B, C, D কোনো সেটেই থাকবে না।

(২) $B = \{x: x \in U, x + 5 < 12\}$

দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $B = \{x: x \in U, x + 5 < 12\} = \{x: x \in U, x < 12 - 5\}$
$= \{x: x \in U, x < 7\}$

7 থেকে ছোট সার্বিক সেটের উপাদানগুলো হলো 1, 2, 3, 4, 5, 6 ∴ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

বি.দ্র: এই প্রশ্নটিকে ‘১’ নং এ বর্ণিত ১ম পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমাধান করা যায়। আবার নিম্নোক্ত (২), (৩), (৪) প্রশ্নগুলোও একইভাবে সমাধান করা যায়।

(৩) $\mathbf{C = \{x : x \in U, 6 < 2x < 17\}}$

দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $C = \{x : x \in U, 6 < 2x < 17\}$

$= \left\{x : x \in U, \frac{6}{2} < x < \frac{17}{2}\right\} = \{x : x \in U, 3 < x < 8.5\}$

3 থেকে বড় কিন্তু 8.5 থেকে ছোট সার্বিক সেটের সদস্যগুলো হলো 4, 5, 6, 7, 8 $\therefore C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(৪) $\mathbf{D = \{x : x \in U, x^2 < 37\}}$

দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $D = \{x : x \in U, x^2 < 37\} = \{x : x \in U, x < \sqrt{37}\}$

$= \{x : x \in U, x < 6.082\}$

$\sqrt{37}$ থেকে ছোট সার্বিক সেটের উপাদানগুলো হলো 1, 2, 3, 4, 5, 6 $\therefore D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Example-03: $\mathbf{U = \{x : x \in Z^+, 1 \le x \le 20\}}$ **হলে নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ:** [কাজ (খ) পৃ. নং-০৪]

(১) $A = \{x : x, 2$ এর গুণিতক$\}$ (২) $B = \{x : x, 5$এর গুণিতক$\}$ (৩) $C = \{x : x, 10$ এর গুণিতক$\}$

প্রদত্ত তথ্যের আলোকে $C \subset A$, $B \subset A$, $C \subset B$ এর কোনগুলো সত্য বা মিথ্যা বল।

সমাধান: প্রথম অংশ: আমরা জানি, সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট Z^+ $\therefore Z^+ = \{1, 2, 3, \dots \dots\}$

দেওয়া আছে, $U = \{x : x \in Z^+, 1 \le x \le 20\}$

$\therefore U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

(১) **$A = \{x : x, 2$ এর গুণিতক$\}$**

2 দ্বারা বিভাজ্য সকল সংখ্যাই 2 এর গুণিতক, যেহেতু $A \subseteq U$

$\therefore A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

(২) **$B = \{x : x, 5$এর গুণিতক$\}$**

5 দ্বারা বিভাজ্য সকল সংখ্যাই 5 এর গুণিতক, যেহেতু $B \subseteq U$ $\therefore B = \{5, 10, 15, 20\}$

(৩) **$C = \{x : x, 10$ এর গুণিতক$\}$**

10 দ্বারা বিভাজ্য সকল সংখ্যাই 10 এর গুণিতক, যেহেতু $C \subseteq U$ $\therefore C = \{10, 20\}$

দ্বিতীয় অংশ: (প্রদত্ত তথ্যের আলোকে সত্য-মিথ্যা যাচাই)

এখানে, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; $B = \{5, 10, 15, 20\}$; $C = \{10, 20\}$

$C \subset A$ এর অর্থ হলো C সেটের সকল উপাদান A সেটের অন্তর্ভুক্ত এবং $n(C) < n(A)$

অর্থাৎ C, A এর প্রকৃত উপসেট এখন,

C সেটের সকল উপাদান A সেটের সদস্য এবং C এর সদস্য সংখ্যা A থেকে কম। $\therefore C \subset A$ সত্য

B সেটের সকল উপাদান A সেটের সদস্য নয় অর্থাৎ B, A এর প্রকৃত উপসেট নয়। $\therefore B \subset A$ মিথ্যা

C সেটের সকল উপাদান B সেটের সদস্য এবং C সেটের উপাদান সংখ্যা B সেট হতে কম। অর্থাৎ C, B এর প্রকৃত উপসেট। $\therefore C \subset B$ সত্য।

Type-02: বিভিন্ন প্রকার সেট সম্পর্কিত

সার্বিক সেট (Universal Set)

কয়েকটি সেট প্রথমে বিবেচনা করি।

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{1, 2, 3\}$

এখানে A, B ও C সেট U সেটের উপাদান নিয়ে গঠিত বিধায় U এখানে সার্বিক সেট। সেট সংক্রান্ত কোনো আলোচনায় একটি নির্দিষ্ট সেটকে সার্বিক সেট বলা হবে ঠিক তখনই যখন আলোচনাধীন সকল সেটের উপাদান সমূহ ঐ নির্দিষ্ট সেটের অন্তর্ভুক্ত হয়।

এখন ধরো উপরের সেটসমূহ থেকে U সেটকে মুছে ফেললাম, তখন কি আর সার্বিক সেট থাকবে? যদি থাকে তাহলে কোন সেটটি সার্বিক সেট? হ্যাঁ ঠিক ধরেছো, A হবে তখন সার্বিক সেট, কারণ, B ও C সেট A সেটের উপাদান নিয়ে গঠিত।

উপসেট (Subset)

দুটি সেট A ও B হলে, A কে B এর উপসেট বলা হবে যদি ও কেবল যদি A এর প্রত্যেক উপাদান B এর উপাদান হয় এবং একে $A \subseteq B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $A = \{3, 5\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ হওয়ায় A, B এর উপসেট। আবার, $C = \{3, 6\}$ যা B এর উপসেট নয়। অন্যদিকে $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ যা বাস্তবে B এর সকল উপাদান নিয়েই গঠিত বিধায় B ও D কে একে অপরের উপসেট বলা হয় (এরা প্রকৃত উপসেট নয়)

এক্ষেত্রে, $A \subset B$ -কে পড়া হয় A is a proper subset of B অর্থাৎ B এর একটি প্রকৃত উপসেট হচ্ছে A।

আবার, D যেহেতু B এর প্রকৃত উপসেট নয় তাই $D \subseteq B$ বা $B \subseteq D$ লিখা হয়। এছাড়া, C, B এর উপসেট না হওয়ায় একে $C \not\subset B$ (C is not a subset of B) দ্বারা লিখা যায়।

জেনে রাখো

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ দুটি সেট বিবেচনায়,
A হচ্ছে B এর উপসেট অর্থাৎ, $A \subset B$
B হচ্ছে A এর সুপারসেট অর্থাৎ, $B \supset A$

ফাঁকা সেট (Empty Set)

কোনো সেটে উপাদান না থাকলে, সেরূপ সেটকে ফাঁকা সেট বলা হয় এবং $\emptyset$ (ফাই) অথবা {} লিখে প্রকাশ করা যায়।

সেট সমতা (Equality of Sets)

A ও B সেট যদি এমন হয় যে এদের উপাদানগুলো একই তবে A ও B একই সেট এবং তা $A = B$ লিখে প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক, $A = \{1, 2, 3\}$ ও $B = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ এই দুই সেট কি একই সেট? অনেকে ভাবতে পারে সেট দুটো আলাদা। কারণ, A সেটে উপাদান সংখ্যা 3 এবং B সেটে উপাদান সংখ্যা 6 কিন্তু বিষয়টা এমন না। একই উপাদান একাধিকবার লিখলেও তা একটি উপাদান হিসেবেই সেটে গণ্য হয়। সেক্ষেত্রে, $B = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ আর $B = \{1, 2, 3\}$ একই। তাই A ও B সেট একই সেট নির্দেশ করে।

প্রকৃত উপসেট (Proper Subset)

A ও B দুটি সেট হলে A কে B এর প্রকৃত উপসেট বলা হবে যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $A \neq B$ হয়। অর্থাৎ A এর প্রত্যেক উপাদান B এরও উপাদান এবং B তে অন্তত একটি উপাদান এমন আছে যা A তে নেই।

যেমন: $A = \{5, 6, 7\}$ ও $B = \{5, 6, 7, 8\}$। A, B এর প্রকৃত উপসেট বুঝাতে $A \subset B$ লিখা হয়।

জেনে রাখো

- যেকোন সেট A এর জন্য $A \subseteq A$। কারণ, প্রতিটি সেটের সব উপাদান নিয়ে গঠিত সেট মূল সেটের উপসেট (প্রকৃত উপসেট নয়)।
- যেকোন সেট A এর জন্য $\emptyset \subseteq A$।
- $\emptyset$ বা ফাঁকা সেট যেকোন সেটের প্রকৃত উপসেট।

সেটের অন্তর (Difference of Sets)

দুটি সেট A ও B হলে, $A \backslash B$ কে A বাদ B সেট বলা হয় অর্থাৎ, A এর যে সকল উপাদান B তে আছে সেগুলো A থেকে বর্জন করে $A \backslash B$ গঠন করা হয়। $A \backslash B \subseteq A$ এবং $B \backslash A \subseteq B$ হবে।

অর্থাৎ, $A = \{1, 2, 3\}$ ও $B = \{2, 3, 4\}$ হলে, $A \backslash B = \{1\}$ হবে, $\{1, 4\}$ হবে না কারণ 4, A সেটের উপাদান নয় তেমনি, $B \backslash A = \{4\}$ হবে।

পূরক সেট (Complementary Set)

সার্বিক সেট U এবং $A \subseteq U$ হলে A এর পূরক সেট হচ্ছে $U \setminus A$,
অর্থাৎ, $U \setminus A = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$
এক্ষেত্রে A এর যে পূরক সেট পাওয়া যায়, তাকে A' বা A^C দিয়ে প্রকাশ করা হয়।
ধরা যাক, $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\} \therefore A^C = U \setminus A = \{1, 2, 3, 4\} - \{1, 2\} = \{3, 4\}$
এখানে, $\{3, 4\}$ উপাদান দুটি A সেটে বিদ্যমান নেই।

শক্তি সেট (Power Set)

A একটি সেট হলে, A সেটের সকল উপসেটকে একত্রে A এর শক্তি সেট বলা হয় এবং একে $P(A)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। উল্লেখ্য যে, $\emptyset \subseteq A$। কাজেই $\emptyset, P(A)$ এরও উপাদান।

A সেট	P(A) শক্তি সেট
$A = \emptyset$	$P(A) = \{\emptyset\}$
$A = \{1\}$	$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$
$A = \{1, a\}$	$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}$
$A = \{1, a, x\}$	$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{x\}, \{1, a\}, \{a, x\}, \{1, x\}, \{1, a, x\}\}$

জেনে রাখো

A কোনো একটি সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে,
- $P(A)$ সেটের উপাদান সংখ্যা বা A সেটের মোট উপসেট সংখ্যা হবে $= 2^n$
- A সেটের প্রকৃত মোট উপসেট সংখ্যা হবে $= 2^n - 1$

Example-04: যদি $A = \{a, b, c, d, e\}$ হয়, তবে $P(A)$ নির্ণয় কর। [কাজ পৃ. নং-৪]

সমাধান: এখানে, $A = \{a, b, c, d, e\}$
A এর শক্তি সেট অর্থাৎ A সেটের সকল উপসেটের সেট-ই হলো $P(A)$
$\therefore P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\},$
$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\},$
$\{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

Example-05: যদি $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$ এবং $D = \{1, 3\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$P(A) = \{A, B, C, D, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$ [কাজ পৃ. নং-৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$ এবং $D = \{1, 3\}$
$\therefore P(A) = \{\{1,2,3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$
যেহেতু, $A = \{1, 2,3\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}, D = \{1, 3\}$
$\therefore P(A) = \{A, B, C, D, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$ **(দেখানো হলো)**

Example-06: যদি $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 5\}$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
(ii) $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$ [ব.বো.'১৭] [কাজ পৃ. নং-৫]

সমাধান: (i) দেওয়া আছে, $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 5\}$
$\therefore P(A) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$
এবং $P(B) = \{\{2,5\}, \{2\}, \{5\}, \emptyset\}$
বামপক্ষ $= P(A) \cap P(B) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\} \cap \{\{2, 5\}, \{2\}, \{5\}, \emptyset\} = \{\{2\}, \emptyset\}$
আবার, $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 5\} = \{2\}$
ডানপক্ষ $= P(A \cap B) = \{\{2\}, \emptyset\}$
$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ
$\therefore P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ **(দেখানো হলো)**

(ii) বামপক্ষ $= P(A) \cup P(B) = \{\{1,2\},\{1\},\{2\},\emptyset\} \cup \{\{2,5\},\{2\},\{5\},\emptyset\}$

$= \{\{1,2\},\{2,5\},\{1\},\{2\},\{5\},\emptyset\}$

আবার, $A \cup B = \{1,2\} \cup \{2,5\} = \{1,2,5\}$

ডানপক্ষ $= P(A \cup B) = \{\{1,2,5\},\{1,2\},(1,5),(2,5),\{1\},\{2\},\{5\},\emptyset\}$

$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ

$\therefore P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$ **(দেখানো হলো)**

Type-03: সেটের সংযোগ, ছেদ সেট, নিশ্ছেদ সেট ও ভেনচিত্র সম্পর্কিত

সেটের সংযোগ (Union of Sets)

দুইটি সেট A ও B হলে, A ও B এর সংযোগ সেটকে $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B অথবা A Union B। অর্থাৎ, দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলা হয়।

ধরা যাক, $A = \{1,2\}$ ও $B = \{6,7\}$ $\therefore A \cup B = \{1,2\} \cup \{6,7\} = \{1,2,6,7\}$

অর্থাৎ, $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

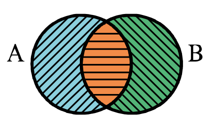
সেটের ছেদ (Intersection of Sets)

দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদানসমূহকে নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলা হয়। দুইটি সেট A ও B হলে তাদের ছেদ সেটকে $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A ছেদ B অথবা A Intersection B।

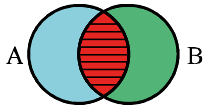
ধরা যাক, $A = \{1,2,3\}, B = \{3,5,8\}$ $\therefore A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{3,5,8\} = \{3\}$

অর্থাৎ, $A \cap B = \{x: x \in A$ এবং $x \in B\}$

সংযোগ সেট ও ছেদ সেটের কিছু বৈশিষ্ট্য:



$A \cup B$



$A \cap B$

ধরি, দুইটি সেট A ও B তাহলে তাদের সংযোগ সেট $A \cup B$ এবং ছেদ সেট $A \cap B$.

খেয়াল কর, A সেটের সকল উপাদান কিন্তু $A \cup B$ এ বিদ্যমান। তাই A সেটকে আমরা $A \cup B$ এর উপসেট হিসেবে বিবেচনা করতে পারি B এর ক্ষেত্রেও Same ঘটনাই ঘটে।

পূর্বের উদাহরণ:
$A = \{1,2\}$
$B = \{2,3\}$
$A \cup B = \{1,2,3\}$
$A \cap B = \{2\}$

(i) $\therefore A \subseteq A \cup B$

একইভাবে, $B \subseteq A \cup B$

অর্থাৎ, আলোচনাধীন সকল সেট তাদের সংযোগ সেটের উপসেট। আবার, A ও B এর ছেদ সেট $(A \cap B)$ এর সকল উপাদান A সেটে বিদ্যমান। তাই, $A \cap B$ কে আমরা A এর উপসেট হিসেবে চিন্তা করতে পারি।

(ii) $\therefore A \cap B \subseteq A$

একইভাবে $A \cap B \subseteq B$

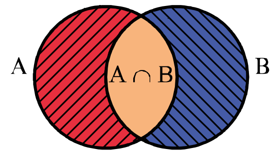
অর্থাৎ, আলোচনাধীন সেটসমূহের ছেদ সেট উভয় সেটের উপসেট

(iii) আবার, $A \cap B$ এর সকল উপাদান $A \cup B$ তে বিদ্যমান থাকায় আমরা লিখতে পারি: $A \cap B \subseteq A \cup B$

(iv) দুইটি সেট A ও B হলে, A ও B এর সংযোগ সেটের উপাদান সংখ্যা A ও B সেটদ্বয়ের উপাদান সংখ্যা যোগফল হতে A ও B এর ছেদ সেটের উপাদান সংখ্যার বিয়োগফলের সমান।

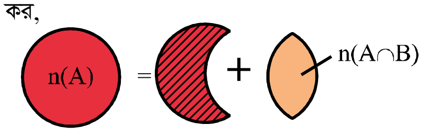
অর্থাৎ, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ এই বিষয়টি আমরা ভেনচিত্রের সাহায্যে প্রমাণ করব।

দুইটি সেট A ও B হলে, তাদের সংযোগ সেট ও ছেদ সেটকে একই ভেনচিত্রে প্রকাশ করে পাই,

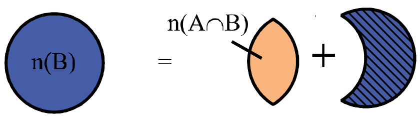


A ∩ B

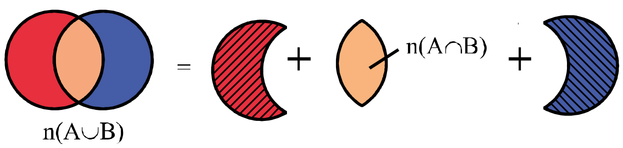
খেয়াল কর,

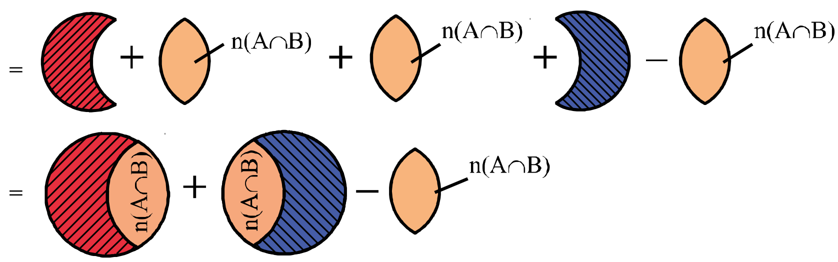


আবার,



এখন,





$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Set)

দুইটি সেটের মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান না থাকলে সেট দুইটিকে পরস্পর নিশ্ছেদ সেট বলা হয়।

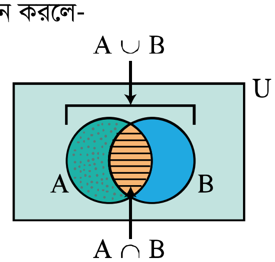
ধরা যাক, $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\} \therefore A \cap B = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \{\}$

এক্ষেত্রে সবসময় ছেদ সেট করলে ফাঁকা সেট আসবে।

ভেনচিত্র (Venn Diagram)

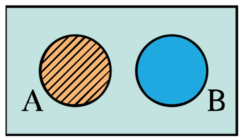
জন ভেন (১৮৩৪-১৯২৩) সেটের কার্যবিধি চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করেন। এতে বিবেচনাধীন সেটগুলোকে সমতলে অবস্থিত বিভিন্ন আকারের জ্যামিতিক চিত্র যেমন: আয়ত, বৃত্ত এবং ত্রিভুজ ব্যবহারের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়। জন ভেনের নামানুসারে চিত্রগুলো ভেনচিত্র নামে পরিচি

(i) যদি একটি সার্বিক সেট U এর দুটি ভিন্ন সেট A ও B এমন হয়, যেন A সেটের কিছু উপাদান B সেটে বিদ্যমান, সেক্ষেত্রে A ও B সেটের মধ্যে সাধারণ উপাদান থাকবে। ভেনচিত্রে উপস্থাপন করলে-



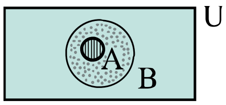
A ও B এর মধ্যে সাধারণ উপাদান আছে। আবার, A ও B এর সকল উপাদান বিবেচনা করলে তা A ∪ B এর সমান।

(ii) একটি সার্বিক সেটের (U) ভিতর দুটি ভিন্ন সেট A ও B যাদের মাঝে কোনো সাধারণ (Common) উপাদান নেই। সেক্ষেত্রে একে ভেনচিত্রে স্থাপন করলে-



A ও B এর মধ্যে কোনো সাধারণ উপাদান নেই অর্থাৎ $A \cap B = \emptyset$

(iii) সার্বিক সেট (U) এর দুটি সেট A ও B এমন হয় যেখানে A সেটের সকল উপাদান B সেটের মধ্যে বিদ্যমান তবে এই ঘটনাকে ভেনচিত্রে উপস্থাপন করলে-



A এর সকল উপাদান B এর মধ্যে বিদ্যমান অর্থাৎ, A, B এর একটি উপসেট

Example-07: **সার্বিক সেট $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এর দুইটি উপসেট $A = \{x: x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x: x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$। $A \cup B, A \cap B, A', B', A' \cup B', (A \cap B)'$ এবং $(A \cup B)'$ বের কর।**

সমাধান: এখানে, $A = \{x: x$ মৌলিক সংখ্যা$\} = \{2, 3, 5, 7\}$

$B = \{x: x$ বিজোড় সংখ্যা$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

সুতরাং, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $A \cap B = \{3, 5, 7\}$

$A' = U - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 5, 7\} = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$

$B' = U - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$\therefore A' \cup B' = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\} \therefore A' \cap B' = \{0, 4, 6, 8\}$

$\therefore (A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{3, 5, 7\} = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}$

$\therefore (A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} = \{0, 4, 6, 8\}$

Example-08: **বণ্টন বিধির সূত্রটি যাচাই কর, যেখানে $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং $C = \{3, 5, 6, 7\}$। এই যাচাইকরণ ভেনচিত্রের মাধ্যমেও দেখাও।** [কাজ পৃ. নং-৮]

সমাধান: বণ্টনবিধির সূত্রগুলো নিম্নরূপ:

(i)$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6,\}$

(i) $B \cap C = \{2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 5, 6, 7\} = \{3, 5\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

আবার $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{3, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **(প্রমাণিত)**

(ii)$(B \cup C) = \{2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 6\}$

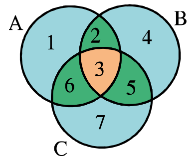
আবার, $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$

এবং $A \cap C = \{1, 2, 3, 6\} \cap \{3, 5, 6, 7\} = \{3, 6\}$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 3\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 6\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(প্রমাণিত)**

ভেনচিত্রের মাধ্যমে যাচাইকরণ:



তিনটি পরস্পরছেদী বৃত্তক্ষেত্র দ্বারা A, B ও C সেট চিহ্নিত করি এতে সার্বিক সেট সাতটি এলাকায় বিভক্ত হলো যাদের 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

(i) ভেনচিত্র হতে পাই,

সেট	এলাকা
A	1, 2, 3, 6
$B \cap C$	3, 5
$A \cup (B \cap C)$	1, 2, 3, 5, 6
$A \cup B$	1, 2, 3, 4, 5, 6
$A \cup C$	1, 2, 3, 5, 6, 7
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$	1, 2, 3, 5, 6

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **(দেখানো হলো)**

(i) ভেনচিত্র হতে পাই,

সেট	এলাকা
A	1, 2, 3, 6
$B \cup C$	2, 3, 4, 5, 6, 7
$A \cap (B \cup C)$	2, 3, 6
$A \cap B$	2, 3
$A \cap C$	3, 6
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$	2, 3, 6

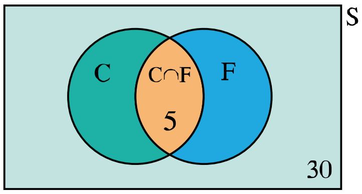
$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(দেখানো হলো)**

Example-09: কোনো শ্রেণির 30 জন ছাত্রের 20 জন ফুটবল এবং 15 জন দাবা পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত যেকোনো একটি খেলা পছন্দ করে। কতজন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে? [কাজ (ক) পৃ. নং-১৮]

সমাধান: মনে করি, সকল ছাত্রদের সেট S এবং ছাত্রদের মধ্যে যারা ফুটবল খেলতে পছন্দ করে তাদের সেট F ও যারা দাবা খেলতে পছন্দ করে তাদের সেট C

তাহলে প্রশ্নানুসারে, $n(S) = 30; n(F) = 20; n(C) = 15$ এবং $n(S) = n(F \cup C) = 30$ [$\because$ প্রত্যেক ছাত্র কোনো না কোনো খেলা পছন্দ করে]

দুটি খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রসংখ্যা, $n(F \cap C) = ?$



আমরা জানি, $n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C)$

$\therefore n(F) + n(C) - n(F \cap C) = 30$

$\Rightarrow 20 + 15 - n(F \cap C) = 30$ [মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 35 - 30 = n(F \cap C) \therefore n(F \cap C) = 5$

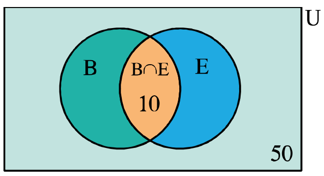
অতএব, দুটি খেলাই পছন্দ করে 5 জন ছাত্র।

Example-10: কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 50 জন বাংলা, 20 জন ইংরেজি এবং 10 জন বাংলা ও ইংরেজি বলতে পারে। দুইটি ভাষায় অন্তত একটি ভাষা কতজন বলতে পারে? [কাজ (খ) পৃ. নং-১৮]

সমাধান: মনে করি, বাংলা বলতে পারে এমন লোকের সেট B এবং ইংরেজি বলতে পারে এমন লোকের সেট E

তাহলে প্রশ্নানুসারে, $n(B) = 50, n(E) = 20, n(B \cap E) = 10$

দুটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে, $n(B \cup E) = ?$



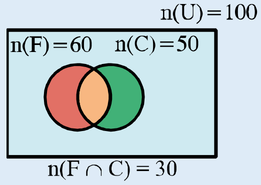
আমরা জানি, $n(B \cup E) = n(B) + n(E) - n(B \cap E)$

$\Rightarrow n(B \cup E) = 50 + 20 - 10 \Rightarrow n(B \cup E) = 70 - 10 \therefore n(B \cup E) = 60$

অতএব, দুটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে 60 জন ছাত্র।

নিশ্চয়ই অধ্যায়ের শুরুর গল্পের কথা তোমাদের মনে আছে। চলো, এখন সমস্যাটির সমাধান করে ফেলি ভেনচিত্র ও সেটের সাহায্যে।

গল্পে রুমানের ক্লাসে,



ফুটবল খেলতে পারে, $n(F) = 60$

ক্রিকেট খেলতে পারে, $n(C) = 50$

ফুটবল ও ক্রিকেট উভয় খেলা পারে, $n(F \cap C) = 30$

∴ কমপক্ষে একটি খেলা পারে এমন ছাত্রের সংখ্যা $= n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C) = 60 + 50 - 30 = 80$

∴ একটি খেলাও পারে না এমন ছাত্র সংখ্যা $= (100 - 80)$ জন $= 20$ জন

Example-11: ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফেঞ্চ, 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

(১) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি? [কাজ (গ) পৃ. নং-১৮]

(২) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে?

(৩) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?

সমাধান: ধরি, সকল শিক্ষার্থীর সেট U, ফ্রেঞ্চ নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট F, জার্মান নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট G, স্প্যানিশ নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট S।

∴ $n(U) = 100, n(F) = 42, n(G) = 30, n(S) = 28, n(F \cap S) = 10, n(G \cap S) = 8, n(F \cap G) = 5, n(F \cap G \cap S) = 3$

(১) অন্তত একটি ভাষা নিয়েছে এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা, $n(F \cup G \cup S)$

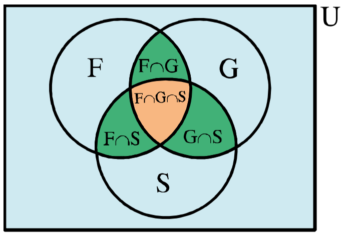
∴ একটি ভাষাও নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা, $n(U) - n(F \cup G \cup S)$

আমরা জানি, $n(F \cup G \cup S) = n(F) + n(G) + n(S) - n(F \cap S) - n(F \cap G) - n(G \cap S) + n(F \cap G \cup S)$

$= 42 + 30 + 28 - 10 - 5 - 8 + 3 = 103 - 23 = 80$

∴ একটি ভাষাও নেয়নি এমন শিক্ষার্থীরা সংখ্যা $= n(U) - n(F \cap G \cap S) = 100 - 80 = 20$ **(Ans.)**

(২) ভেনচিত্র হতে,



শুধু ফ্রেঞ্চ ভাষা নিয়েছে

$= n(F) - n(F \cap G) - n(F \cap S) + n(F \cap G \cap S)$

$= 42 - 5 - 10 + 3 = 45 - 15 = 30$ জন

শুধু জার্মান ভাষা নিয়েছে

$= n(G) - n(F \cap G) - n(G \cap S) + n(F \cap G \cap S)$

$= 30 - 5 - 8 + 3 = 33 - 13 = 20$ জন

শুধু স্প্যানিশ ভাষা নিয়েছে

$= n(S) - n(F \cap S) - n(G \cap S) + n(F \cap G \cap S) = 28 - 10 - 8 + 3 = 31 - 18 = 13$ জন

∴ তিনটি ভাষার মধ্যে শুধু একটি ভাষা নিয়েছে= (30+20+13) জন = 63 জন। **(Ans.)**

(৩) শুধু ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ নিয়েছে $= n(F \cap S) - n(F \cap G \cap S) = 10 - 3 = 7$ জন